Def. 拓扑流形.

拓扑空间 M 称为拓扑流形，若满足

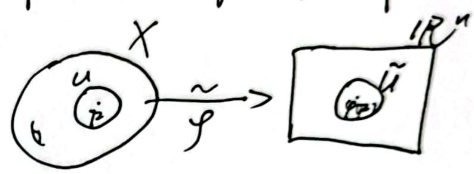
I. $\forall p\in M$, M在p是局部n维欧氏的;

II. M是 Hausdorff;

III. M是第二可数的.

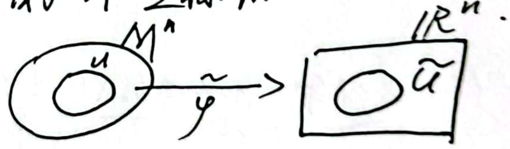
记为 M^n.

Def. $(X, \mathcal{T}_X)$ 拓扑空间，给定 $p\in X$，~~若存在~~ 若 $\exists U$ 为p的邻域，s.th. U与 $\tilde{U}(\subseteq \mathbb{R}^n)$ 中开集同胚，则称 X 在p点是局部n维欧氏的.



Def. 坐标卡.

M^n 拓扑流形. 设 $U(\subseteq M)$ 为开集，若 $\exists \varphi: U \to \tilde{U}(\subseteq \mathbb{R}^n)$ 开集为同胚，则称 (U,φ) 是 M 的一个坐标卡.



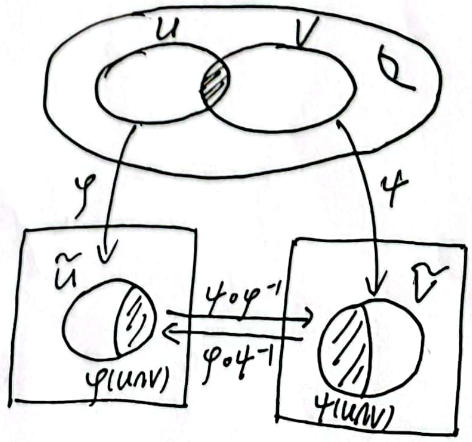
M^n 所有坐标卡的第一项构成 M 的一个开覆盖.

Def. 过渡映射.

M^n 拓扑流形，若 (U,φ) 和 (V,ψ) 是两个坐标卡，若 $U\cap V\neq\varnothing$，~~则 $\psi\circ\varphi^{-1}$~~

则 $\psi\circ\varphi^{-1}: \varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$

称为过渡映射.



Def. 若 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 和 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 均是光滑，则称 (U,φ)，(V,ψ) 光滑相容.

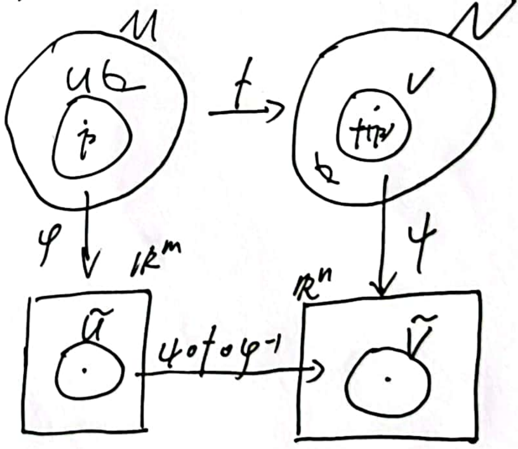
Def. 设 $\mathcal{A}$ 是 M^n 若干坐标卡的集合，若 $\bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U = M$，则称 $\mathcal{A}$ 是 M 的一个图册. 进一步若 $\mathcal{A}$ 中任何两个相交坐标卡都光滑相容，则称 $\mathcal{A}$ 是一个光滑图册. 若更进一步非 M 的其他光滑图册真包含于 $\mathcal{A}$，则称 $\mathcal{A}$ 是一个最大光滑图册.

Def. M^n 拓扑流形，$\mathcal{A}$ 为最大光滑图册，~~则~~ 称为 M^n 的一个光滑结构，$(M^n,\mathcal{A})$ 称为光滑流形.

Def. 光滑映射.

M^m, N^n 光滑流形，$f: M\to N$，若 $\forall p\in M$，$\exists (U,\varphi),(V,\psi)$ 分别为 M^m, N^n 坐标卡，s.th. $p\in U$，$f(p)\in f(U)\subseteq V$

$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}: \underset{\mathbb{R}^m}{\varphi(U)} \to \underset{\mathbb{R}^n}{\psi(f(U))}$ 光滑.



则称 f 为光滑映射.

Def. $F: M^m \to N^n$ 光滑，$dF_p: T_pM \to T_{F(p)}N$ 切映射.

$(x_1,\cdots,x_m)\mapsto(F_1(\vec{x}),\cdots,F_n(\vec{x}))$.

$F_i \in \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$

· 若 dF_p 单, $\forall p\in M$, 则称 F 是浸入 $m\le n$

· 若 dF_p 满 $\forall p\in M$, 则称 F 是淹没. $m\ge n$.

· 若 F 是浸入、单射, 且 $F: M\to F(M)$ 同胚, 则称 F 是嵌入.

$$|J|=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

Def. 子流形.

M^m 光滑流形. $N\subseteq M^m$, N 称为n维子流形若 $\forall x\in N$,

$\exists h: U\to\tilde{U}$, $U\subseteq M^m$. s.t. $h(U\cap N)=\tilde{U}\cap \mathbb{R}^n$.