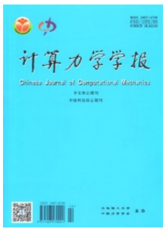


计算力学学报
*Chinese Journal of Computational Mechanics*
ISSN 1007-4708,CN 21-1373/O3

计 算 力 学 学 报
Chinese Journal of Computational Mechanics

# 基于微分求积有限元法的双层微板系统振动特性研究

张立民，张波*，张旭，段宇杭，沈火明

（应用力学与结构安全四川省重点实验室，西南交通大学力学与航空航天学院，成都，611756）

**摘 要**：基于修正的偶应力理论和两变量精化的剪切变形理论，建立了由 Winkler-Pasternak 连续弹性夹层连接的双层微板系统的自由振动模型，着重推导了系统异步振动的运动微分方程和势能泛函。融合 Gauss-Lobatto 求积准则和微分求积准则构造了具有 $C^1$ 连续性的微分求积有限元。通过与已有文献进行对比，验证了数值方法的有效性。详细讨论了各种因素对系统同步和异步振动特性的影响。结果表明：系统的自由振动特性对材料尺度参数、长宽比、长厚比以及边界条件呈现出依赖性；弹性夹层刚度仅对系统异步振动产生作用；随着模态阶次的增大，材料尺度参数和弹性夹层刚度对异步振动频率和模态的影响变得显著。

**关键词**：修正的偶应力理论；两变量精化的剪切变形理论；双层微板系统；微分求积有限元；振动特性

**中图分类号**：TB383；TB34　**文献标志码**：A

# Application of differential quadrature finite element method to the free vibration analysis of double-layered microplate system

ZHANG Limin, ZHANG Bo*, ZHANG Xu, DUAN Yuhang, SHEN Huoming

(Applied Mechanics and Structure Safety Key Laboratory of Sichuan Province, School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 611756)

**Abstract:** This paper developed the free vibration model of a double-layered microplate system connected by Winkler-Pasternak continuous elastic interlayer within the combined framework of the modified couple stress theory and a two-variable refined shear deformation theory. The derivation of differential equations of motion and potential energy for the asynchronous vibration of the system was emphasized. To solve the resulting boundary value problem, the differential quadrature finite element with $C^1$-continuity was constructed by combining differential quadrature and Gauss-Lobatto quadrature rules. The efficacy of our solution method was demonstrated by comparing its predictions with the available ones. The effects of various factors on the system's synchronous and asynchronous vibration characteristics were discussed in detail. It is revealed that: (1) the double-layered microplate system's vibration characteristics depend on the material length scale parameter, length-to-width ratio, length-to-thickness ratio and boundary conditions; (2) the elastic interlayer stiffness only affects the asynchronous vibration characteristics of the system; (3) size effects on the vibration frequencies and mode shapes become noticeable as the material length scale parameter or the elastic interlayer stiffness increases.

**Keywords:** Modified couple stress theory; Two-variable refined shear deformation theory; Double-layered microplate system; Differential quadrature finite element; Vibration characteristics.

## 1 引 言

因拥有体积小、重量轻、能耗低、响应快和灵敏度高等优点，微机电系统(Mico-Electro-Mechanical-Systems, MEMS)广泛应用于航空航天、生物医疗、汽车电子、无线通讯和药物检测等领域。过去三十年里，国内外研究人员经过大量技

**基金项目**：国家自然科学基金（11602204000000，11872321）；中央高校基本科研业务费-专题研究项目（2682022ZTPY081）；西南交通大学2021 年度教改项目（2103105）.

**作者简介**：张 波*（1984-），男，博士，副教授

(E-mail：zhangbo2008@swjtu.edu.cn).

术积累设计制造了各种 MEMS 产品，如微纳米谐振器、压力传感器、加速度计、麦克风、湿度传感器以及气体传感器等。依据受力和几何特点，MEMS 承载构件通常可被简化为小尺度梁、板和壳等。然而，相关实验[1, 2]观察到，当构件几何特征尺寸与组分材料内禀特征长度处于同一量级时，其自由振动特性具有尺度效应。

经典连续介质力学理论由于缺少反映组分材料内禀特征尺寸的本构参数，因而难以表征尺度效应现象。鉴于此，研究者通过在变形体自由能中引入高阶变形及高阶应力度量，发展出各种非经典连续介质力学理论。在诸多非经典理论中，修正的应变梯度理论[1]和修正的偶应力理论[3]在微米量级梁板结构的静动力学建模和分析中备受瞩目。尽管修正的应变梯度理论比修正的偶应力理论有更广阔的适用范围，但要同时确定三个材料尺度参数相当困难。修正的偶应力理论中仅涉及一个材料尺度参数，这给微尺度梁板结构的实验表征带来了极大便利。Kong[4]综述了过去十几年间在修正的偶应力理论下微米量级梁、板及壳等结构的静动力学模型和数值方法，并对未来亟需关注的课题进行了前瞻性分析。

随着 MEMS 产品应用场景越来越广泛，单层微构件已难以满足当下日益增长的功能需求。作为单层微板的重要技术延伸，双层微板系统如今已在微纳米传感器、致动器、谐振器及晶体管等领域获得许多应用，其振动特性因而备受研究者重视。Murmu 和 Adhikari[5]采用 Navier 法推导了四边简支双层纳米板系统的自由振动频率，发现非局部效应对同步振动的影响显著高于异步振动。Ansari 等[6]基于 Mindlin 板理论和微分求积法探讨了考虑层间范德华力且各层具有不同边界条件的多层石墨烯系统的自由振动，并采用 Navier 法推导了四边简支情形下系统的振动频率。Lin[7]采用宏观多层 Kirchhoff 板模型和微分求积法研究了由 Winkler-Pasternak 连续弹性夹层连接的多层石墨烯系统的振动特性，讨论了范德华力、长宽比和石墨烯层数对系统振动频率和模态的影响。Xu 等[8]利用辛展开和边界叠加法获得了典型边界条件下嵌入于弹性介质中的正交各向异性双层纳米板系统振动频率的精确解。范俊海等[9]针对双层悬臂石墨烯系统受迫振动问题，发展了求解系统稳态受迫振动的辛解析方法。Allahyari 和 Asgari[10]基于 Reddy 板理论建立了大幅度自由振动模型，联合应用多尺度法和伽辽金法获得了同步和异步非线性振动响应。刘建超[11]根据 Kirchhoff 板理论和 Kelvin 粘弹性模型建立了双层粘弹性功能梯度简支纳米板的非局部振动和屈曲控制方程，探讨了各种因素对两类问题中的同步和异步特性的影响。王祥[12]基于哈密顿体系及辛叠加法研究了在磁场作用下从单层纳米板到三层纳米板、从简单边界条件到复杂边界条件的自由振动问题。

目前，关于双层微板系统的研究主要是结合非局部理论和三类传统板理论(即 Kirchhoff 型、Mindlin 型和 Reddy 型)，且模型求解时仅考虑上下层均为四边简支的情形，而结合偶应力/应变梯度理论和精化的高阶剪切变形理论的双层微板系统的自由振动研究还很匮乏。本文拟基于修正的偶应力理论和两变量精化的剪切变形理论建立双层微板系统的自由振动模型，构造相应的微分求积有限元以求解复杂边界下系统的自由振动问题，探讨边界条件、弹性介质参数、材料尺度参数以及长厚比对系统同步和异步振动特性的影响。

# 2 双层微板系统的自由振动模型

## 2.1 修正的偶应力理论

修正的偶应力理论[3]在经典偶应力理论[13]基础上假定力偶平移后满足力线平移定理，进而引入高阶力偶矩平衡方程，最终将偶应力张量约束为对称形式。在该理论下，各向同性线弹性体的应变能为：

$$U=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+m_{ij}^{(s)}\chi_{ij}^{(s)}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{1}$$

式中 $\sigma_{ij}$、$\varepsilon_{ij}$、$m_{ij}{}^{(s)}$与 $\chi_{ij}{}^{(s)}$分别代表应力张量、应变张量、偶应力张量以及旋转梯度张量的对称部分，具体定义为：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right),\ \chi_{ij}^{(s)}=\frac{1}{2}\left(\theta_{i,j}+\theta_{j,i}\right),$$
$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{ij}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij},\ m_{ij}^{(s)}=2\mu l^2\chi_{ij}^{(s)}. \tag{2}$$

式中$u_i$是位移矢量，$\theta_i$是转动矢量，$\lambda$和$\mu$是拉梅常数，$\delta_{ij}$是 Kronecker 符号，$l$是材料特征尺度参数。转动矢量$\theta_i$的定义如下：

$$\theta_i=\frac{1}{2}e_{ijk}u_{k,j} \tag{3}$$

式中$e_{ijk}$是置换符号。

## 2.2 双层微板系统的几何描述

图 1 所示为由 Winkler-Pasternak 连续弹性夹层连接的各向同性双层微板系统。描述系统变形的两个笛卡尔坐标系分别位于各层板的中面上，且原点位于各层板中面左上角点。微板系统的长度、宽度分别为$L_x$、$L_y$，Winkler 和 Pasternak 模量分别为$k_w$、$k_p$，上下层微板的厚度、弹性模量、泊松比、剪切模量以及密度均相等，分别采用$h$、$E$、$v$、$G$和$\rho$表示。

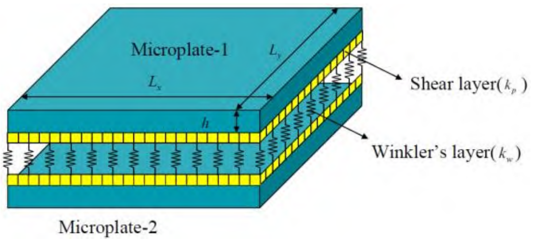



图 1 双层微板系统示意图

Fig.1 Schematic of the double-layered microplate system

采用文献[14]中两变量精化的剪切变形理论描述微板

系统的位移场，即

$$
\begin{aligned}
&w^{(i)}(x,y,z,t)=w_b^{(i)}(x,y,t)+w_s^{(i)}(x,y,t),\\
&u^{(i)}(x,y,z,t)=\left(\frac{z}{4}-\frac{5z^3}{3h^2}\right)\frac{\partial w_s^{(i)}}{\partial x}-z\frac{\partial w_b^{(i)}}{\partial x},\\
&v^{(i)}(x,y,z,t)=\left(\frac{z}{4}-\frac{5z^3}{3h^2}\right)\frac{\partial w_s^{(i)}}{\partial y}-z\frac{\partial w_b^{(i)}}{\partial y}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

式中$u^{(i)}$、$v^{(i)}$和$w^{(i)}$分别表示第$i$层微板内任一点沿$x$、$y$和$z$方向的位移分量，$w_b^{(i)}$和$w_s^{(i)}$分别表示由纯弯曲和纯剪切变形引起的挠度分量。利用式(2)和(4)可得第$i$层板的应变张量和曲率张量的非零分量以及相应的非零应力分量，具体表达式参见文献[15]。

### 2.3 双层微板系统的运动微分方程

由文献[15]中单层微板的应变能不难导出本文双层微板系统的应变能：

$$
\begin{aligned}
\Pi_s = \sum_{i=1}^{2}\int_A \Bigg\{&\Lambda_1\left[\left(\frac{\partial^2 w_b^{(i)}}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w_b^{(i)}}{\partial y^2}\right)^2\right]+\frac{3\Lambda_6}{4}\left(\frac{\partial^2 w_s^{(i)}}{\partial x\partial y}\right)^2\\
&\Lambda_2\left[\left(\frac{\partial^2 w_s^{(i)}}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w_s^{(i)}}{\partial y^2}\right)^2\right]+(\Lambda_3-\Lambda_6)\frac{\partial^2 w_b^{(i)}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_b^{(i)}}{\partial y^2}+\\
&\left(\frac{\Lambda_3}{84}-\frac{3\Lambda_6}{8}\right)\frac{\partial^2 w_s^{(i)}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_s^{(i)}}{\partial y^2}+\Lambda_4\left[\left(\frac{\partial w_s^{(i)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_s^{(i)}}{\partial y}\right)^2\right]+\\
&\Lambda_5\left[\left(\frac{\partial^2 w_s^{(i)}}{\partial x\partial y}\right)^2+84\left(\frac{\partial^2 w_b^{(i)}}{\partial x\partial y}\right)^2\right]+\frac{7\Lambda_6}{3}\frac{\partial^2 w_b^{(i)}}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w_s^{(i)}}{\partial x\partial y}+\\
&\frac{7\Lambda_6}{12}\left(\frac{\partial^2 w_b^{(i)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_b^{(i)}}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_s^{(i)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_s^{(i)}}{\partial y^2}\right)+2\Lambda_6\left(\frac{\partial^2 w_b^{(i)}}{\partial x\partial y}\right)^2\Bigg\}\mathrm{d}A
\end{aligned}
\tag{5}
$$

式中

$$
\Lambda_1=\frac{D}{2}+\frac{Ghl^2}{2},\ \Lambda_2=\frac{D^{(i)}}{168}+\frac{3Ghl^2}{16},\ \Lambda_3=Dv,\ \Lambda_4=\frac{5Gh}{12}+\frac{25Gl^2}{24h},\ \Lambda_5=\frac{Gh^3}{504},\ \Lambda_6=Ghl^2,\ D=\frac{Eh^3}{12(1-v^2)}.
\tag{6}
$$

从式(4)出发可得双层微板系统的动能：

$$
\begin{aligned}
\Pi_k = \sum_{i=1}^{2}\int_A \Bigg\{&\frac{\rho h^3}{24}\left[\left(\frac{\partial^2 w_b^{(i)}}{\partial x\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w_b^{(i)}}{\partial y\partial t}\right)^2\right]+\frac{\rho h}{2}\left(\frac{\partial w_b^{(i)}}{\partial t}+\frac{\partial w_s^{(i)}}{\partial t}\right)^2+\\
&\frac{\rho h^3}{2016}\left[\left(\frac{\partial^2 w_s^{(i)}}{\partial x\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w_s^{(i)}}{\partial y\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}A
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Winkler-Pasternak 弹性夹层的势能为：

$$
\begin{aligned}
\Pi_f = \frac{1}{2}\int_A \Bigg\{&k_w\left(w_b^{(1)}+w_s^{(1)}-w_b^{(2)}-w_s^{(2)}\right)+k_p\left[\frac{\partial\left(w_b^{(1)}+w_s^{(1)}-w_b^{(2)}-w_s^{(2)}\right)}{\partial x}\right]^2+\\
&k_p\left[\frac{\partial\left(w_b^{(1)}+w_s^{(1)}-w_b^{(2)}-w_s^{(2)}\right)}{\partial y}\right]^2\mathrm{d}A
\end{aligned}
\tag{8}
$$

当上下层板完全相同时，系统会发生同步和异步振动。引入相对挠度$w_b^{(0)}=w_b^{(1)}-w_b^{(2)}$，$w_s^{(0)}=w_s^{(1)}-w_s^{(2)}$。同步情形下$w_b^{(0)}=w_s^{(0)}=0$，弹性夹层不起作用，系统振动等价于单层板的情形；异步情形下$w_b^{(0)}\neq 0$，$w_s^{(0)}\neq 0$。利用 Euler–Lagrange 方程可得一般情形下系统的运动微分方程组。将上下层微板关于两类挠度变量的运动微分方程对应相减，可得系统异步振动的运动微分方程：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\nabla^2\frac{\partial^2 w_b^{(0)}}{\partial t^2}-\rho h\frac{\partial^2\left(w_b^{(0)}+w_s^{(0)}\right)}{\partial t^2}-2\Lambda_1\frac{\partial^4 w_b^{(0)}}{\partial x^2\partial y^2}-2\Lambda_1\left(\frac{\partial^4 w_b^{(0)}}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w_b^{(0)}}{\partial y^4}\right)\\
&+2k_p\nabla^2\left(w_b^{(0)}+w_s^{(0)}\right)-2k_w\left(w_b^{(0)}+w_s^{(0)}\right)-\frac{7\Lambda_6}{12}\nabla^4 w_s^{(0)}=0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{1008}\nabla^2\frac{\partial^2 w_s^{(0)}}{\partial t^2}-\rho h\frac{\partial^2\left(w_b^{(0)}+w_s^{(0)}\right)}{\partial t^2}-(4\Lambda_2+2\Lambda_5)\frac{\partial^4 w_s^{(0)}}{\partial x^2\partial y^2}\\
&-\frac{7\Lambda_6}{12}\nabla^4 w_b^{(0)}+2\Lambda_4\nabla^2 w_s^{(0)}-2\Lambda_2\left(\frac{\partial^4 w_s^{(0)}}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w_s^{(0)}}{\partial y^4}\right)\\
&-2k_w\left(w_b^{(0)}+w_s^{(0)}\right)+2k_p\nabla^2\left(w_b^{(0)}+w_s^{(0)}\right)=0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

需要指出的是，当$k_w=k_p=0$时，以上两式可退化为同步振动微分方程。对于上下层板均为四边简支情形，可以采用 Navier 法获得系统同步和异步振动的解析解，具体推导过程省略。对于其它边界条件的情形，很难通过解析法获得系统自由振动边值问题的解。

## 3 双层微板系统的微分求积有限元法

本节以系统异步振动为例，给出微分求积有限元的构造过程。从式(9-10)出发，结合虚位移原理，可得系统异步振动下的总势能泛函：

$$
\begin{aligned}
\Pi_s = \int_A \Bigg\{&\frac{\rho h^3}{24}\left[\left(\frac{\partial^2 w_b^{(0)}}{\partial x\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w_b^{(0)}}{\partial y\partial t}\right)^2\right]+\frac{\rho h^3}{2016}\left[\left(\frac{\partial^2 w_s^{(0)}}{\partial x\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w_s^{(0)}}{\partial y\partial t}\right)^2\right]+\\
&\frac{\rho h}{2}\left(\frac{\partial w_b^{(0)}}{\partial t}+\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial t}\right)^2-k_p\left[\frac{\partial\left(w_b^{(0)}+w_s^{(0)}\right)}{\partial x}\right]^2-k_p\left[\frac{\partial\left(w_b^{(0)}+w_s^{(0)}\right)}{\partial y}\right]^2-\\
&k_w\left(w_b^{(0)}+w_s^{(0)}\right)^2-2\Lambda_1\left(\frac{\partial^2 w_b^{(0)}}{\partial x\partial y}\right)^2-\Lambda_1\left[\left(\frac{\partial^2 w_b^{(0)}}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w_b^{(0)}}{\partial y^2}\right)^2\right]\\
&-(2\Lambda_2+\Lambda_5)\left(\frac{\partial^2 w_s^{(0)}}{\partial x\partial y}\right)^2-\Lambda_2\left[\left(\frac{\partial^2 w_s^{(0)}}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w_s^{(0)}}{\partial y^2}\right)^2\right]\\
&-\frac{7\Lambda_6}{12}\left(\frac{\partial^2 w_b^{(0)}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_s^{(0)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_b^{(0)}}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_s^{(0)}}{\partial y^2}\right)-\frac{7\Lambda_6}{6}\frac{\partial^2 w_b^{(0)}}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w_s^{(0)}}{\partial x\partial y}\\
&-\Lambda_4\left[\left(\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial y}\right)^2\right]\Bigg\}\mathrm{d}A
\end{aligned}
\tag{11}
$$

式(11)中出现了$w_b^{(0)}$和 $w_s^{(0)}$的二阶偏导数，这意味着两者需要具备 $C^1$ 连续性。在偶应力/应变梯度理论下，一些研究者发展了求解微尺度梁板静动力学问题的有限元法[16]、等几何分析[17, 18]以及微分求积有限元法[15, 19]等。其中，微分求积有限元法融合 Gauss-Lobatto 求积准则和微分求积准则，离散势能泛函时先数值积分后数值微分，具有良好的收敛性和计算精度。图 2 给出了实现$w_b^{(0)}$和 $w_s^{(0)}$的 $C^1$ 连续性要求的微分求积几何映射策略。

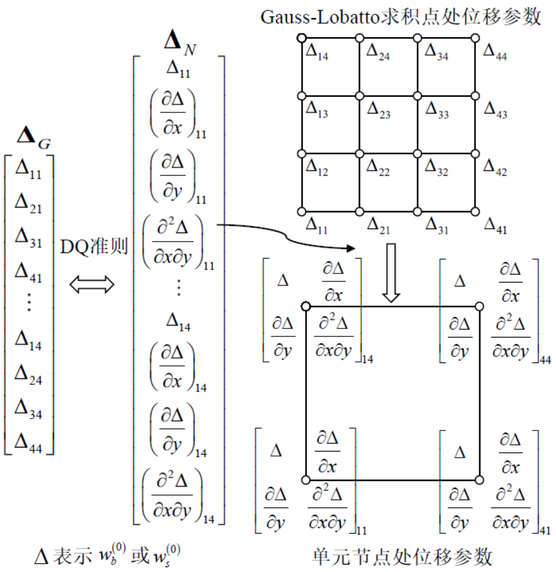



图 2 双层微板系统的微分求积几何映射策略

Fig.2 Differential quadrature-based geometric mapping scheme for the double-layered microplate system

对于长宽分别为$2a$、$2b$的单元，Gauss-Lobatto 求积点坐标向量为：

$$\boldsymbol{x}_{GL}=\left[0,\ 2a\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right),\ 2a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\right),\ 2a\right],$$

$$\boldsymbol{y}_{GL}=\left[0,\ 2b\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right),\ 2b\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\right),\ 2b\right]. \tag{12}$$

为获得单元内任一点的位移，采用 Lagrange 插值技术可将位移场变量$\Delta$表示为：

$$\Delta=\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4} l_m(x)l_n(y)\Delta_{mn} \tag{13}$$

式中$\Delta$表示$w_b^{(0)}$和$w_s^{(0)}$，$l_m(x)$和$l_n(y)$分别表示$x$方向第$m$个求积点和$y$方向第$n$个求积点处的 Lagrange 插值函数，$\Delta_{mn}$表示相应求积点处的位移值。

微分求积准则采用权系数矩阵来取代各阶偏微分项，从而避免了对位移场变量直接求导。求积点处位移场变量$\Delta$的各阶导数可表示为：

$$\left[\frac{\partial^{p\oplus q}\boldsymbol{\Delta}}{\partial x^p\partial y^q}\right]=\boldsymbol{A}_{xy}^{\langle p\oplus q\rangle}\boldsymbol{\Delta}_G \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{\Delta}_G=[\Delta_{11}\quad \Delta_{21}\quad \Delta_{31}\quad \Delta_{41}\quad \cdots\quad \Delta_{14}\quad \Delta_{24}\quad \Delta_{34}\quad \Delta_{44}]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

$\boldsymbol{A}_{xy}^{\langle p\oplus q\rangle}$($p,q$取值范围为 0,1 或 2)为微分求积权系数矩阵，具体形式参见文献[15]。

为了满足 $C^1$ 连续性要求，需要将单元求积点位移列向量$\boldsymbol{\Delta}_G$修改为如下单元节点位移列向量$\boldsymbol{\Delta}_N$：

$$\boldsymbol{\Delta}_N=\left[\Delta_{11}\quad \left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)_{11}\quad \left(\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right)_{11}\quad \left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial x\partial y}\right)_{11}\quad \cdots \quad \Delta_{14}\quad \left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)_{14}\quad \left(\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right)_{14}\quad \left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial x\partial y}\right)_{14}\right]^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

利用微分求积准则可得$\boldsymbol{\Delta}_G$与$\boldsymbol{\Delta}_N$之间的转换关系：

$$\boldsymbol{\Delta}_N=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Delta}_G \tag{17}$$

式中单元节点处位移向量$\boldsymbol{\Delta}_N$可表示为$\boldsymbol{W}_{bN}^{(0)}$和$\boldsymbol{W}_{sN}^{(0)}$。转换矩阵$\boldsymbol{B}$的表达式参见文献[15]。

利用式(14)和(17)离散式(11)可得：

$$\begin{aligned}
\Pi_s=&\left(\dot{\boldsymbol{W}}_{bN}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\frac{\rho h^3}{24}\left(\boldsymbol{A}_x^{\langle 1\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_x^{\langle 1\rangle}+\\ \frac{\rho h^3}{24}\left(\boldsymbol{A}_y^{\langle 1\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_y^{\langle 1\rangle}+\frac{\rho h}{2}\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\dot{\boldsymbol{W}}_{bN}^{(0)}\\
&+\left(\dot{\boldsymbol{W}}_{sN}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\frac{\rho h^3}{2016}\left(\boldsymbol{A}_x^{\langle 1\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_x^{\langle 1\rangle}\\ +\frac{\rho h^3}{2016}\left(\boldsymbol{A}_y^{\langle 1\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_y^{\langle 1\rangle}+\frac{\rho h}{2}\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\dot{\boldsymbol{W}}_{sN}^{(0)}\\
&-\left(\boldsymbol{W}_{bN}^{(0)}+\boldsymbol{W}_{sN}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}k_w\boldsymbol{Q}+k_p\left(\boldsymbol{A}_x^{\langle 1\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_x^{\langle 1\rangle}\\ +k_p\left(\boldsymbol{A}_y^{\langle 1\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_y^{\langle 1\rangle}\end{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\left(\boldsymbol{W}_{bN}^{(0)}+\boldsymbol{W}_{sN}^{(0)}\right)\\
&-\left(\boldsymbol{W}_{bN}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\Lambda_1\left(\boldsymbol{A}_x^{\langle 2\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_x^{\langle 2\rangle}\\ +\Lambda_1\left(\boldsymbol{A}_y^{\langle 2\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_y^{\langle 2\rangle}+\\ 2\Lambda_1\left(\boldsymbol{A}_{xy}^{\langle 1\oplus 1\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_{xy}^{\langle 1\oplus 1\rangle}\end{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{W}_{bN}^{(0)}\\
&-\left(\boldsymbol{W}_{sN}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\Lambda_2\left(\boldsymbol{A}_x^{\langle 2\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_x^{\langle 2\rangle}\\ +\Lambda_2\left(\boldsymbol{A}_y^{\langle 2\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_y^{\langle 2\rangle}\\ +\Lambda_4\left(\boldsymbol{A}_x^{\langle 1\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_x^{\langle 1\rangle}\\ +\Lambda_4\left(\boldsymbol{A}_y^{\langle 1\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_y^{\langle 1\rangle}+\\ (2\Lambda_2+\Lambda_5)\left(\boldsymbol{A}_{xy}^{\langle 1\oplus 1\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_{xy}^{\langle 1\oplus 1\rangle}\end{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{W}_{sN}^{(0)}\\
&-\frac{7\Lambda_6}{12}\left(\boldsymbol{W}_{bN}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\left(\boldsymbol{A}_x^{\langle 2\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_x^{\langle 2\rangle}+\\ 2\left(\boldsymbol{A}_{xy}^{\langle 1\oplus 1\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_{xy}^{\langle 1\oplus 1\rangle}\\ +\left(\boldsymbol{A}_y^{\langle 2\rangle}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_y^{\langle 2\rangle}\end{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{W}_{sN}^{(0)}
\end{aligned} \tag{18}$$

式中$\boldsymbol{Q}$为权系数矩阵：

$$\boldsymbol{Q}=\frac{ab}{36}diag\left\{\begin{bmatrix}1 & 5 & 5 & 1 & 5 & 25 & 25 & 5 & \cdots\\ 5 & 25 & 25 & 5 & 1 & 5 & 5 & 1 & \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right\} \tag{19}$$

引入如下单元总体位移列向量：

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_{\mathrm{N}}=\Bigg[&\left(w_b^{(0)}\right)_{11}\quad \left(\frac{\partial w_b^{(0)}}{\partial x}\right)_{11}\quad \left(\frac{\partial w_b^{(0)}}{\partial y}\right)_{11}\quad \left(\frac{\partial^2 w_b^{(0)}}{\partial x\partial y}\right)_{11}\quad \cdots\\
&\left(w_s^{(0)}\right)_{11}\quad \left(\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial x}\right)_{11}\quad \left(\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial y}\right)_{11}\quad \left(\frac{\partial^2 w_s^{(0)}}{\partial x\partial y}\right)_{11}\quad \cdots\\
&\cdots\\
&\left(w_b^{(0)}\right)_{14}\quad \left(\frac{\partial w_b^{(0)}}{\partial x}\right)_{14}\quad \left(\frac{\partial w_b^{(0)}}{\partial y}\right)_{14}\quad \left(\frac{\partial^2 w_b^{(0)}}{\partial x\partial y}\right)_{14}\quad \cdots\\
&\left(w_s^{(0)}\right)_{14}\quad \left(\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial x}\right)_{14}\quad \left(\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial y}\right)_{14}\quad \left(\frac{\partial^2 w_s^{(0)}}{\partial x\partial y}\right)_{14}\Bigg]^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{20}$$

异步振动下系统的单元质量矩阵$\boldsymbol{M}^e$和刚度矩阵$\boldsymbol{K}^e$的元

素可表示为：

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{e}=\frac{\partial^{2}\Pi_{s}}{\partial \boldsymbol{d}_{N}(i)\partial \boldsymbol{d}_{N}(j)},\boldsymbol{K}_{ij}^{e}=-\frac{\partial^{2}\Pi_{s}}{\partial \boldsymbol{d}_{N}(i)\partial \boldsymbol{d}_{N}(j)} \tag{21}$$

利用 Maple 软件导出单元刚度矩阵和质量矩阵，组装所有单元刚度矩阵(或质量矩阵)并引入位移边界条件，进而建立双层微板系统自由振动的微分求积有限元方程。对于上下层微板不同的情形，采用类似的过程可以建立系统自由振动的微分求积有限元，但此时单元节点位移参数为 64 个。常见的边界约束主要有固支(C)、简支(S)以及自由(F)，数值实施中对应于三者的位移边界条件为：

固支(C)：

$$w_b^{(0)}=w_s^{(0)}=\frac{\partial w_b^{(0)}}{\partial x}=\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial x}=\frac{\partial w_b^{(0)}}{\partial y}=\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial y}\bigg|_{x=0\ \text{or}\ x=L_x}=0,$$

$$w_b^{(0)}=w_s^{(0)}=\frac{\partial w_b^{(0)}}{\partial x}=\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial x}=\frac{\partial w_b^{(0)}}{\partial y}=\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial y}\bigg|_{y=0\ \text{or}\ y=L_y}=0. \tag{22}$$

简支(S)：

$$w_b^{(0)}=w_s^{(0)}=\frac{\partial w_b^{(0)}}{\partial y}=\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial y}\bigg|_{x=0\ \text{or}\ x=L_x}=0,$$

$$w_b^{(0)}=w_s^{(0)}=\frac{\partial w_b^{(0)}}{\partial x}=\frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial x}\bigg|_{y=0\ \text{or}\ y=L_y}=0. \tag{23}$$

自由(F)：无位移约束。

# 4 数值结果与讨论

本节采用微分求积有限元法进行算例分析，讨论材料尺度参数、长宽比、长厚比、弹性夹层刚度以及边界条件对系统振动特性的影响。由于结构自由振动特性与量纲无关，为了便于今后研究，引入以下无量纲参数：

$$\varpi=\frac{\omega L_y^2}{h}\sqrt{\frac{\rho}{E}},\ \bar{k}_w=\frac{k_w L_y^4}{D},\ \bar{k}_p=\frac{k_p L_y^2}{D}. \tag{24}$$

## 4.1 有效性验证

文献[15, 19]对修正的偶应力/应变梯度梁板的微分求积有限元的收敛性开展了深入研究，发现在相同结点参数下微分求积有限元相比于标准有限元具有更低的单元矩阵条件数。因此，本节对单元收敛性仅做简单讨论。表 1 给出了不同网格下 SSSS-SSSS 双层微板系统前 6 阶无量纲固有频率，其中$L_x/L_y$=1，$L_x/h$=8，$l/h$=1。结果显示，随着网格的细化，系统频率能够收敛于稳定值，且当网格为 15×15 时就能获得收敛性结果。

表 1 不同网格下双层微板系统前 6 阶无量纲固有频率

Tab.1 First six dimensionless frequencies of microplate system under different meshes

| 频率 | 网格 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 10×10 | 15×15 | 20×20 | 25×25 | 30×30 |
| $\varpi_1$ | 13.417 | 13.4163 | 13.4163 | 13.4163 | 13.4163 |
| $\varpi_2$ | 14.6455 | 14.6449 | 14.6449 | 14.6449 | 14.6449 |
| $\varpi_{3\text{或}4}$ | 32.3894 | 32.3594 | 32.3577 | 32.3574 | 32.3573 |
| $\varpi_5$ | 32.8624 | 32.8328 | 32.8311 | 32.8308 | 32.8308 |
| $\varpi_6$ | 33.6996 | 33.6707 | 33.6691 | 33.6688 | 33.6688 |

表 2 比较了本文求解方法和文献[20]中 Levy 法所预测的宏观单层矩形板的无量纲基频，此处$l$=0，$L_x/L_y=0.5$，网格密度20×40。出于比较的原因，本文模型同步振动情形下取$l$=0。从表 2 可以看出，微分求积有限元法所预测结果略大于 Levy 法预测结果，但误差均在 1.5%以内，此外两者的差异随着长厚比的增大而显著减小；对于 SSSS 板，微分求积有限元与 Navier 法预测结果十分吻合；边界条件约束越强或长厚比越大，板的振动频率越大，原因在于增加边界约束或长厚比均会使结构刚性增强。

表 2 不同边界条件下宏观单层矩形板的无量纲基频

Tab.2 Dimensionless fundamental frequency of rectangular microplate under different boundary conditions

| $L_x/h$ | 方法 | 边界条件 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | SCSC | SSSC | SSSS | SFSC |
| 5 | 文献[20] | 12.4545 | 11.8454 | 11.3717 | 9.7241 |
| | 本文① | — | — | **11.4159** | — |
| | 本文② | 12.5118 | 11.8948 | 11.4159 | 9.81068 |
| 10 | 文献[20] | 13.3367 | 12.6170 | 12.0675 | 10.2326 |
| | 本文① | — | — | **12.0809** | — |
| | 本文② | 13.3545 | 12.6322 | 12.0809 | 10.3034 |
| 20 | 文献[20] | 13.5953 | 12.8407 | 12.2675 | 10.3760 |
| | 本文① | — | — | **12.2711** | — |
| | 本文② | 13.5999 | 12.8446 | 12.2711 | 10.4417 |

注：① Navier 法；② 微分求积有限元法

## 4.2 参数分析

若无特别说明，本节计算中均采用30×30网格。表 3 列出了 CCSF-CCSF 边界下双层微板系统前 6 阶无量纲固有频率，$L_x/L_y$=1和$L_x/h$=8。结果显示，随着$l/h$的增大，系统频率显著增大，且尺度效应对各阶频率的影响强弱也不尽相同；当$l/h$=1和$l/h$=0时，与两者对应的频率之比介于 1.7 至 2.5，这与文献[2]中悬臂微梁自由振动实验所得结果基本一致。

表 3 CCSF-CCSF 边界下方形双层微板系统的无量纲频率

Tab.3 Dimensionless frequencies of square double-layered microplate system with CCSF-CCSF boundary condition

| $\varpi_n$ | $l/h$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
| $\varpi_1$ | 4.9885 | 5.5555 | 6.8278 | 8.4451 | 10.2557 | 12.1797 |
| $\varpi_2$ | 8.2426 | 8.5559 | 9.4118 | 10.6742 | 12.2184 | 13.9521 |
| $\varpi_3$ | 9.8255 | 11.0123 | 13.8992 | 17.635 | 21.7897 | 26.1683 |
| $\varpi_4$ | 13.4916 | 14.2844 | 16.3244 | 19.2186 | 22.6422 | 26.3924 |
| $\varpi_5$ | 13.5175 | 14.9591 | 18.3786 | 22.8275 | 27.8288 | 33.1398 |
| $\varpi_6$ | 16.6732 | 17.8417 | 20.9049 | 25.1712 | 30.1366 | 35.5107 |

图 3 呈现了不同长宽比下尺度效应对双层微板系统的无量纲固有频率的影响，其中长宽比表示为$\beta=L_x/L_y$，其中$L_y$保持不变。从图中可以看出，随着$L_x/L_y$的减小或者$l/h$的增大，系统频率均呈现出增大趋势，异步频率明显高于同步频率，原因在于同步振动情形下，弹性夹层不起作用，而异步振动时弹性夹层产生变形，使得系统刚度变大。

图 4 给出了不同弹性夹层模量下双层微板系统无量纲异步固有频率随无量纲材料尺度参数的变化。此处，$L_x/h$=8，$L_x/L_y$=1。不失一般性，系统边界条件设为 CCSF-CCSF。同步情形下，系统频率不依赖于弹性夹层模量；异步振动情形下，弹性夹层模量越大，系统频率越大。此外，对比弹性夹层模量$\bar{k}_w$=50 和$\bar{k}_p$=10 时以及$\bar{k}_w$=100 和$\bar{k}_p$=5 可以看到，Pasternak 模量相较于 Winkler 模量对系统异步频率影响更为显著。

图 5 给出了不同边界条件下双层微板系统的无量纲异步固有频率随无量纲材料尺度参数的变化，此处$L_x/h$=8，$L_x/L_y$=1，$\bar{k}_w$=100，$\bar{k}_p$=10。图中结果显示，对于 SFSF-SFSF 情形，系统频率随$l/h$的增大趋势最小，而对于 CCCC-CCCC 情形，系统频率随材料尺度参数变化的增大趋势最显著。换句话说，边界条件约束越强，尺度效应对系统频率的增强效果越显著。从图中还可以看到，异步频率总是大于同步频率，且随着$l/h$的变大，二者的差异会减小，原因可能在于，当考虑尺度效应后，弹性夹层刚度在系统刚度中所占比重降低。表 4 和表 5 分别呈现了$L_x/h$=10时和$L_x/h$=100时 SSSS- SSSS 双层微板系统异步振动模态和频率的尺度效应，此处$L_x/L_y$=1，$\bar{k}_w$=5，$\bar{k}_p$=1。需要说明的是，图中对应的是归一化后系统的相对位移模态云图。从表中可以看出，随着$l/h$的增大，异步振动频率显著变大，前四阶模态云图几乎没有改变，后四阶模态改变比较显著，这说明尺度效应对高阶模态影响更大。此外，对比表 4 和表 5 可以发现，当$L_x/h$从 10 变到 100 时，系统频率显著增大，且两者对应的模态云图也发生了显著改变，这说明剪切变形效应对振动频率和模态均会产生影响。

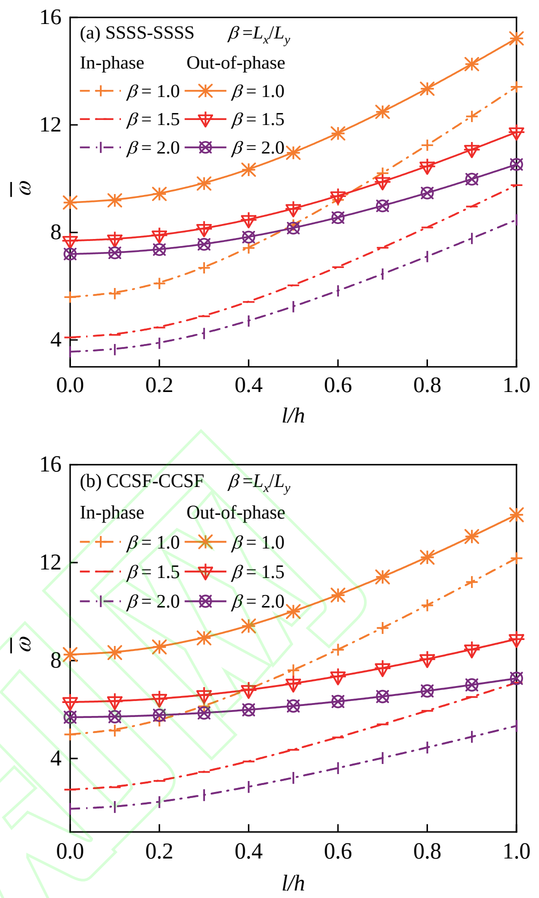



图 3 不同长宽比下双层微板系统的无量纲固有频率

Fig.3 Variation of dimensionless frequencies of a double-layered microplate system with different aspect ratios

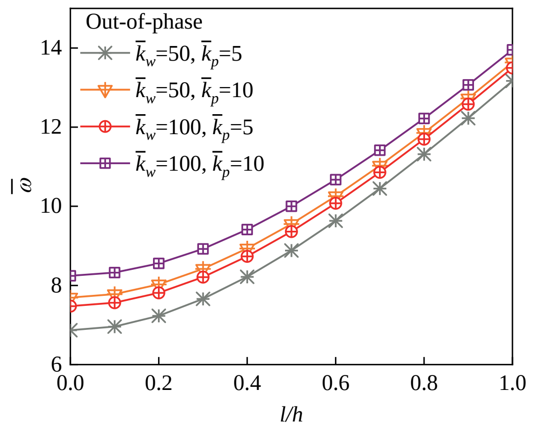



图 4 不同弹性夹层刚度下双层微板系统的无量纲频率

Fig.4 Variation of dimensionless frequencies of a double-layered microplate system with different elastic interlayer stiffness

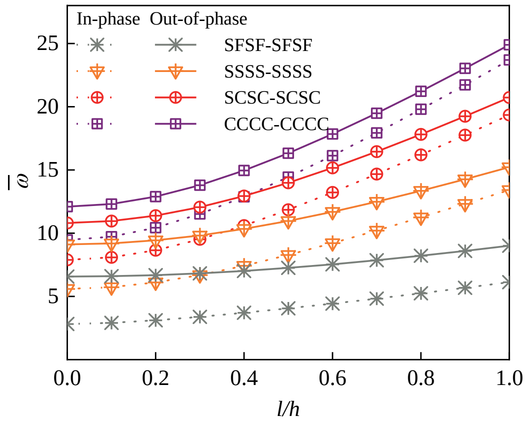



图 5 不同边界条件下双层微板系统前两阶无量纲固有频率

Fig.5 Variation of first two dimensionless frequencies of a double-layered microplate system with different boundary conditions

表 6 呈现了 CCSF-CCSF 双层微板系统异步振动模态和频率的尺度效应，此处$L_x/h$=10，$L_x/L_y$=1，$\bar{k}_w$=5，$\bar{k}_p$=1。表中结果显示，随着随着$l/h$的增大，异步振动频率显著变大，而振动模态并无明显变化。比较表 4 和表 6，可以发现系统振动模态尺度效应的强弱受边界条件影响。

表 7 显示了弹性夹层刚度对 CCCC-CCCC 双层微板系统异步振动模态和频率的影响，此处$L_x/h$=10，$L_x/L_y$=1，$l/h$=0。从表中可以看出，随着弹性夹层刚度的增大，系统前六阶模态几乎没有改变，而第七和第八阶模态呈现出明显的改变，这意味着夹层刚度仅会对高阶模态产生影响。

表 4 $L_x/h$=10时尺度效应对 SSSS-SSSS 双层微板系统振动模态与频率的影响

Tab.4 Size effects on the vibration modes and frequencies of a SSSS-SSSS double-layered microplate system when $L_x/h$=10

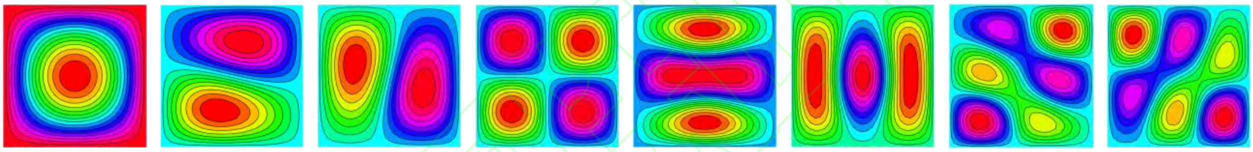
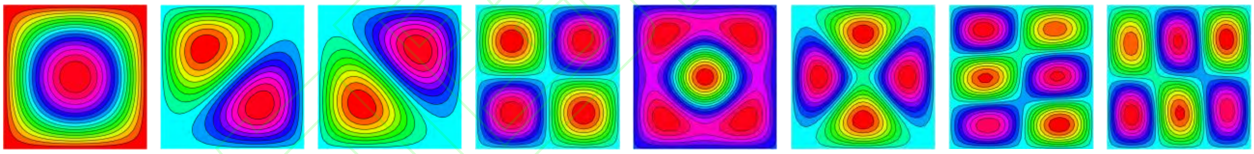
| $l/h$ | 振动模态与频率 |
|---|---|
| 0 |  $\varpi_1 = 6.0626$　$\varpi_2 = 13.9537$　$\varpi_3 = 13.9537$　$\varpi_4 = 21.2688$　$\varpi_5 = 25.8710$　$\varpi_6 = 25.8710$　$\varpi_7 = 32.4230$　$\varpi_8 = 32.4230$ |
| 1 |  $\varpi_1 = 13.7064$　$\varpi_2 = 33.1762$　$\varpi_3 = 33.1762$　$\varpi_4 = 51.8416$　$\varpi_5 = 63.9082$　$\varpi_6 = 63.9082$　$\varpi_7 = 81.5259$　$\varpi_8 = 81.5259$ |

表 5 $L_x/h$=100时尺度效应对 SSSS-SSSS 微板系统振动模态与频率的影响

Tab.5 Size effects on the vibration modes and frequencies of a SSSS-SSSS double-layered microplate system when $L_x/h$=100

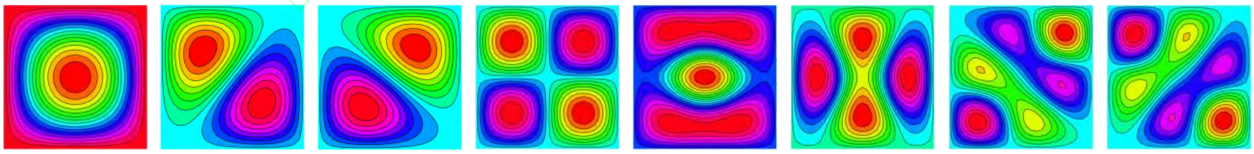
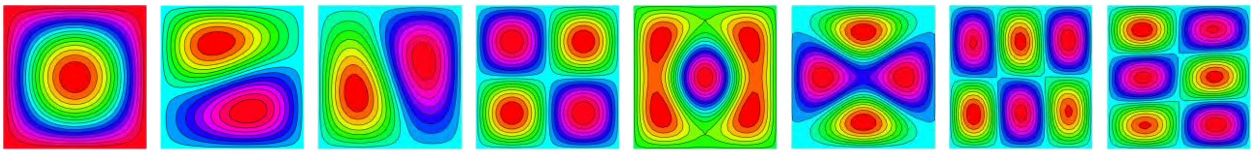
| $l/h$ | 振动模态与频率 |
|---|---|
| 0 |  $\varpi_1 = 6.2456$　$\varpi_2 = 15.0250$　$\varpi_3 = 15.0250$　$\varpi_4 = 23.8231$　$\varpi_5 = 29.6868$　$\varpi_6 = 29.6868$　$\varpi_7 = 38.4766$　$\varpi_8 = 38.4766$ |
| 1 |  $\varpi_1 = 13.9575$　$\varpi_2 = 34.6274$　$\varpi_3 = 34.6274$　$\varpi_4 = 55.2991$　$\varpi_5 = 69.0755$　$\varpi_6 = 69.0755$　$\varpi_7 = 89.7304$　$\varpi_8 = 89.7304$ |

表 6 尺度效应对 CCSF-CCSF 双层微板系统振动模态与频率的影响

Tab.6 Size effects on the vibration modes and frequencies of a CCSF-CCSF double-layered microplate system

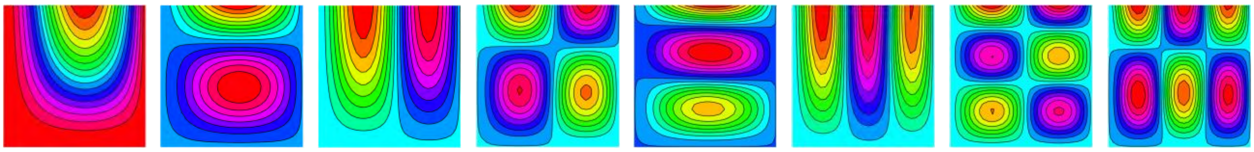
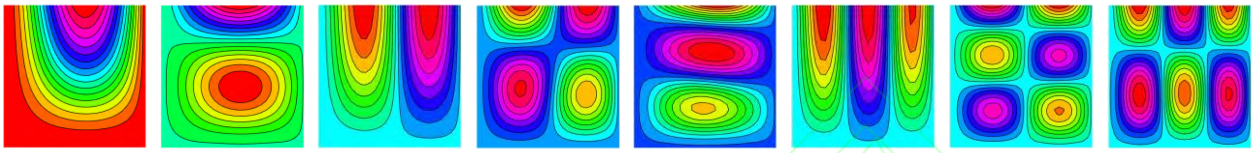
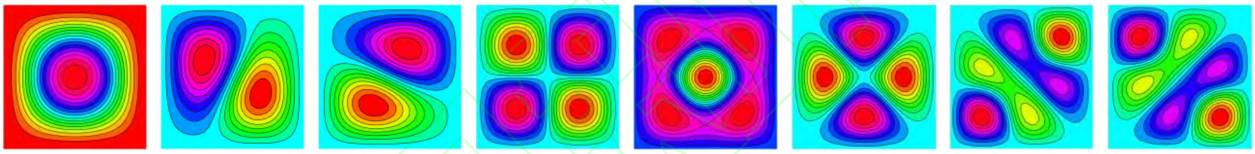
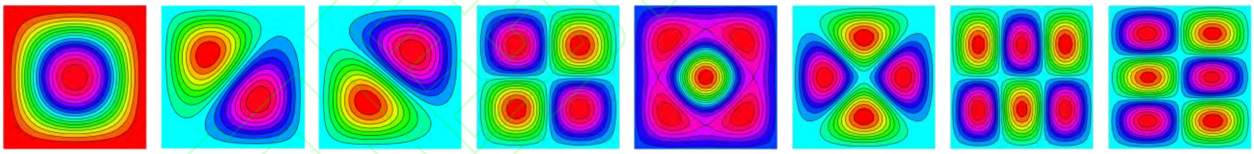
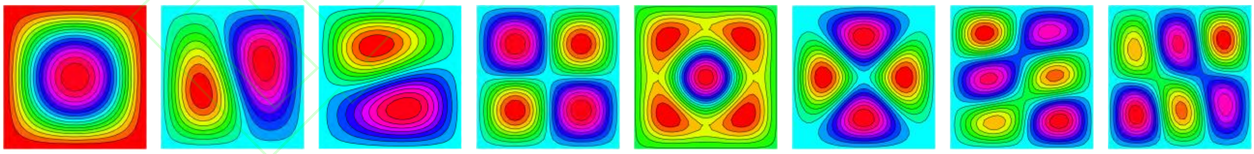
| $l/h$ | 振动模态与频率 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 |  | | | | | | | |
| | $\varpi_1 = 5.5298$ | $\varpi_2 = 10.7921$ | $\varpi_3 = 14.5385$ | $\varpi_4 = 19.6123$ | $\varpi_5 = 20.2832$ | $\varpi_6 = 27.1584$ | $\varpi_7 = 28.6307$ | $\varpi_8 = 31.7408$ |
| 1 |  | | | | | | | |
| | $\varpi_1 = 12.5948$ | $\varpi_2 = 25.3538$ | $\varpi_3 = 35.0916$ | $\varpi_4 = 47.9372$ | $\varpi_5 = 49.4516$ | $\varpi_6 = 68.3797$ | $\varpi_7 = 71.6552$ | $\varpi_8 = 80.5847$ |

表 7 弹性夹层刚度对 CCCC-CCCC 双层微板系统振动模态与频率的影响

Tab.7 Effect of the elastic interlayer stiffness on vibration modes and frequencies of CCCC-CCCC double-layered microplate system

| $(\bar{k}_w, \bar{k}_p)$ | 振动模态与频率 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (5, 1) |  | | | | | | | |
| | $\varpi_1 = 10.1116$ | $\varpi_2 = 19.3665$ | $\varpi_3 = 19.3665$ | $\varpi_4 = 27.2746$ | $\varpi_5 = 31.7784$ | $\varpi_6 = 32.2263$ | $\varpi_7 = 38.9134$ | $\varpi_8 = 38.9134$ |
| (50, 10) |  | | | | | | | |
| | $\varpi_1 = 12.0888$ | $\varpi_2 = 21.6303$ | $\varpi_3 = 21.6303$ | $\varpi_4 = 29.7277$ | $\varpi_5 = 34.2953$ | $\varpi_6 = 34.7655$ | $\varpi_7 = 41.5830$ | $\varpi_8 = 41.5830$ |
| (500, 100) |  | | | | | | | |
| | $\varpi_1 = 23.7602$ | $\varpi_2 = 36.9819$ | $\varpi_3 = 36.9819$ | $\varpi_4 = 47.4337$ | $\varpi_5 = 53.1203$ | $\varpi_6 = 53.6456$ | $\varpi_7 = 62.0186$ | $\varpi_8 = 62.0186$ |

## 5 结论

采用修正的偶应力理论和两变量精化的剪切变形理论发展了由弹性夹层连接的双层微板系统的自由振动模型。针对系统异步自由振动边值问题，构造了对应的 $C^1$ 型微分求积有限元。通过一系列数值算例，说明了本文方法的有效性，并研究了各参数对双层微板系统振动特性的影响。主要结论如下：(1) 当上下层板完全相同时，系统会出现同步和异步振动现象，且异步频率大于同步频率；无量纲材料尺度参数越大，边界约束越强，弹性夹层刚度越大，振动频率越大；长宽比越大，振动频率反而减小。(2) 系统异步振动的相对模态云图依赖于材料尺度参数，长厚比以及弹性夹层刚度：随着材料尺度参数变大，前四阶等低阶模态几乎没有变化，高阶模态呈现出显著的尺寸效应，而不同的边界条件又影响着尺度效应的强弱；随着长厚比增大，削弱了剪切效应的影响，同样使得高阶模态发生改变；弹性夹层刚度对低阶模态

几乎不起作用，仅对高阶模态产生影响。

## 参考文献(References):


[1] Lam D C C, Yang F, Chong A C M, et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, **51**(8): 1477-1508.

[2] Lei J, He Y M, Guo S, et al. Size-dependent vibration of nickel cantilever microbeams: Experiment and gradient elasticity [J]. *AIP Advances*, 2016, **6**(10): 105202.

[3] Yang F, Chong A C M, Lam D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**(10): 2731-2743.

[4] Kong S. A Review on the Size-Dependent Models of Micro-beam and Micro-plate Based on the Modified Couple Stress Theory [J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2021, **29**(1): 1-31.

[5] Murmu T and Adhikari S. Nonlocal vibration of bonded double-nanoplate-systems [J]. *Composites Part B: Engineering*, 2011, **42**(7): 1901-1911.

[6] Ansari R, Arash B and Rouhi H. Nanoscale vibration analysis of embedded multi-layered graphene sheets under various boundary conditions [J]. *Computational Materials Science*, 2011, **50**(11): 3091-3100.

[7] Lin R M. Nanoscale vibration characterization of multi-layered graphene sheets embedded in an elastic medium [J]. *Computational Materials Science*, 2012, **53**(1): 44-52.

[8] Chenghui, Xu, Dalun, et al. Coupled effect of in-plane magnetic field and size effect on vibration properties of the completely free double-layered nanoplate system - ScienceDirect [J]. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2019, **108**: 215-225.

[9] 范俊海，贾菊芳，赖安迪，等. 双层石墨烯系统稳态受迫振动问题中的辛方法 [J]. 计算力学学报, 2020, **37**(2): 193-198. (FAN Jun-hai, JIA Ju-fang, LAI An-di, et al. Symplectic method for the forced vibration of bilayers graphene system in steady-state [J].*Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(2): 193-198. (in Chinese))

[10] Allahyari E and Asgari M. Effects of in-phase and anti-phase large amplitude nonlinear models for double-layer nanostructures [J]. *SN Applied Sciences*, 2019, **1**(8): 813-.

[11] 刘建超，双层粘弹性 FGM 纳米板的振动和屈曲性能分析[D]. 浙江大学, 2017. (LIU Jian-chao. The Vibration and Buckling Analysis of Double-viscoelestic-FGM-nanoplates [D]. Zhejiang University, 2017. (in Chinese))

[12] 王祥. 磁场作用下三层纳米板自由振动分析的辛方法 [D]. 大连理工大学, 2021. (WANG Xiang. Symplectic Method for Free Vibration Analysis of Triple-layered Nanoplates under Magnetic Field [D]. Dalian University of Technology, 2021. (in Chinese))

[13] Mindlin R and Tiersten H. Effects of couple-stresses in linear elasticity [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 415-448.

[14] Shimpi R P. Refined plate theory and its variants [J]. *AIAA journal*, 2002, **40**(1): 137-146.

[15] Duan Y H, Zhang B, Li X Y, et al. Size-Dependent Elastic Buckling of Two-Variable Refined Microplates Embedded in Elastic Medium [J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2022, **14**(4): 2250039.

[16] Zhang B, He Y M, Liu D B, et al. A non-classical Mindlin plate finite element based on a modified couple stress theory [J]. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2013, **42**: 63-80.

[17] Makvandi R, Reiher J C, Bertram A, et al. Isogeometric analysis of first and second strain gradient elasticity [J]. *Computational Mechanics*, 2018, **61**(3): 351-363.

[18] 邓 阳，尹硕辉，赵子衡. 基于等几何有限元法的功能梯度微板热力耦合屈曲预测 [J]. 计算力学学报, 2020, **37**(5): 553-559. (DENG Yang, YIN Shuo-hui, ZHAO Zi-heng. Thermal-mechanical buckling analysis of functionally graded micro plates using isogeometric finite element method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(5): 553-559. (in Chinese))

[19] Zhang B, Li H, Kong L L, et al. Strain gradient differential quadrature finite element for moderately thick micro-plates [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020, **121**(24): 5600-5646.

[20] Thai H-T and Choi D-H. Analytical solutions of refined plate theory for bending, buckling and vibration analyses of thick plates [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, **37**(18-19): 8310-8323.